может стать причиной разрушения как отд. элемента конструкции, так и сооружения в целом.

Нагрузка, при к-рой устойчивое равновесие переходит в неустойчивое, наз. критич. нагрузкой, а состояние системы — критич. состоянием. Установление критич. состояний составляет осн. предмет теории У. у. с.

Для прямого стержня, сжатого вдоль оси силой P, значение критич. силы $P_{\text{кр}}$ определяется ф-лой Эйлера: $P_{\text{кр}} = \pi^2 EI/(\mu l)^2$, где E — модуль упругости материала; I — момент инерции поперечного сечения; l — длина стержня; μ — коэф., зависящий от условий закрепления концов. В случае двух шарнирных опор, одна из к-рых неподвижна, а вторая подвижна, $\mu = 1$.

Для прямоуг. пластинки, сжатой в одном направлении, критич. напряжение $\sigma_{\text{кр}} = K\pi^2 D/b^2 h$, где $D = Eh^3/12(1-\nu)^2$ — т. н. цилиндрич. жёсткость; b и h — ширина и толщина пластинки; ν — коэф. Пуассона материала; K — коэф., зависящий от условий закрепления краёв и от отношения между размерами пластинки.

В случае круговой цилиндрич. оболочки, сжатой вдоль оси, можно установить т. н. верхнее критич. напряжение $\sigma_{\text{кр в}} = \left[1/\sqrt{3(1-\nu^2)}\right] E(h/R)$, где h и R — толщина и радиус кривизны срединной поверхности оболочки. Несколько иную структуру имеют ф-лы для верхнего критич. напряжения при действии поперечного давления или скручивающих пар сил. Потеря устойчивости реальных оболочек во мн. случаях происходит при меньшей нагрузке вследствие значит. влияния разл. факторов, особенно нач. неправильностей формы.

Для сложных конструкций точное решение задачи У. у. с. затруднено, поэтому прибегают к разл. приближённым методам. Для многих из них пользуются энергетич. критерием устойчивости, в к-ром рассматривается характер изменения потенц. энергии П системы при малом отклонении её от положения равновесия (для устойчивого равновесия $\Pi = \min$). При рассмотрении неконсервативных систем, напр. стержня, сжатого силой, наклон к-рой меняется в процессе изгиба (следящая сила), применяется динамич. критерий, заключающийся в определении малых колебаний нагруженной системы.

Важное значение имеет исследование т. н. закритич. поведения упругих систем. Оно требует решения нелинейных краевых задач. Для стержня закритич. деформация оказывается возможной лишь при его очень большой гибкости. Напротив, для тонких пластинок вполне возможны значит. прогибы в закритич. стадии — при условии, что края пластинки подкреплены жёсткими стержнями (стрингерами). Для оболочек закритич. деформация связана обычно с прощёлкиванием и потерей несущей способности конструкции.

Приведённые выше данные относятся к случаю, когда потеря У. у. с. имеет место в пределах упругости материала. Для исследования У. у. с. за пределами упругости пользуются *пластичности теорией*. Если нагрузка, приводящая к потере устойчивости, динамическая, необходимо учитывать силы инерции элементов конструкции, отвечающие характерным перемещениям. При ударных нагрузках исследуются волновые процессы передачи усилий в конструкции. Если материал конструкции находится в состоянии ползучести, для определения критич. параметров пользуются соотношениями теории ползучести.

Лит.: Болотин В. В., Динамическая устойчивость упругих систем, М., 1956; его же, Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости, М., 1961; Вольмир А. С., Устойчивость деформируемых систем, 2 изд., М., 1967; его же, Оболочки в потоке жидкости и газа. Задачи гидроупругости, М., 1979; Тимошенко С. П., Устойчивость стержней, пластин и оболочек, М., 1971.

А. С. Вольмир.

УСТО́ЙЧИВЫЕ РАСПРЕДЕЛЕ́НИЯ — распределения вероятностей, обладающих свойством, что для любых $a_1 > 0$, b_1, $a_2 > 0$, b_2 имеет место соотношение

$$F(a_1 x + b_1) * F(a_2 x + b_2) = F(ax + b), \qquad (1)$$

где $a > 0$ и b — нек-рые постоянные, F — ф-ция распределения У. р., $*$ — символ операции свёртки двух ф-ций распределения.

Характеристич. ф-ция У. р.:

$$\varphi(t) = \exp\left\{ idt + c|t|^\alpha \left[1 + i\beta \frac{t}{|t|} \omega(t, \alpha)\right]\right\}, \qquad (2)$$

где $0 < \alpha \leqslant 2$, $-1 \leqslant \beta \leqslant 1$, $c \geqslant 0$, d — любое действительное число и

$$\omega(t, \alpha) = \begin{cases} \operatorname{tg}\dfrac{\pi\alpha}{2} & \text{при } \alpha \neq 1, \\ \dfrac{2}{\pi}\ln|t| & \text{при } \alpha = 1. \end{cases}$$

Число α наз. показателем устойчивого распределения. У. р. с показателем $\alpha = 2$ — *Гаусса распределение*, пример У. р. с показателем $\alpha = 1$ — *Коши распределение*.

Благодаря (1) У. р. является безгранично делимым распределением (БДР), т. е. может быть представлено как композиция (свёртка) любого числа $n \geqslant 2$ одинаковых распределений. Для характеристич. ф-ции БДР имеет место т. н. каноническое представление Леви:

$$\ln\varphi(t) = i\gamma t - \frac{\sigma^2 t^2}{2} + \int_{-\infty}^{0} \left(e^{ixt} - 1 - \frac{ixt}{1+x^2}\right) dM(x) + \int_{0}^{\infty} \left(e^{ixt} - 1 - \frac{ixt}{1+x^2}\right) dN(x),$$

где характеристики представления γ, σ^2, M, N удовлетворяют условиям: $-\infty < \gamma < \infty$, $\sigma^2 \geqslant 0$, $M(x)$ и $N(x)$ — неубывающие непрерывные слева ф-ции на $(-\infty, 0)$ и $(0, \infty)$ соответственно и такие, что

$$\lim_{x \to \infty} N(x) = \lim_{x \to -\infty} M(x) = 0,$$

$$\int_{-1}^{0} x^2 dM(x) < \infty, \quad \int_{0}^{1} x^2 dN(x) < \infty.$$

У. р. с показателем α, $0 < \alpha < 2$, соответствует канонич. представление Леви с характеристиками:

$$\sigma^2 = 0, \quad M(x) = c_1/x^\alpha, \quad N(x) = -c_2/x^\alpha, \quad c_1 \geqslant 0, \quad c_2 \geqslant 0,$$

$c_1 + c_2 > 0$, γ — любое действительное число.

Для У. р., за исключением вырожденного распределения, существуют плотности. Эти плотности бесконечно дифференцируемы, одновершинны и отличны от нуля или на всей прямой, или на полупрямой. Для У. р. с показателем α, $0 < \alpha < 2$, при $\delta < \alpha$ выполняются соотношения

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x|^\delta p(x)dx < \infty, \quad \int_{-\infty}^{\infty} |x|^\alpha p(x)dx = \infty,$$

где $p(x)$ — плотность У. р. Явный вид плотностей У. р. известен лишь в немногих случаях.

В совокупности У. р. выделяется класс строго устойчивых распределений, для к-рых имеет место равенство (1) при $b_1 = b_2 = b = 0$. Характеристич. ф-ции строго устойчивого распределения с показателем $\alpha \neq 1$ даются ф-лой (2) при $d = 0$. При $\alpha = 1$ строго устойчивым распределением является лишь распределение Коши. Спектрально положительные (отрицательные) У. р. характеризуются тем, что в канонич. представлении Леви $M(x) \equiv 0$ $(N(x) \equiv 0)$. Для спектрально положительных У. р. существует преобразование Лапласа при $\operatorname{Re} s \geqslant 0$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-sx} p(x)dx = \begin{cases} \exp(-cs^\alpha - ds) & \text{при } \alpha < 1, \\ \exp(cs\ln s - ds) & \text{при } \alpha = 1, \\ \exp(cs^\alpha - ds) & \text{при } \alpha > 1, \end{cases}$$

где $p(x)$ — плотность спектрально положительного У. р. с показателем α, $0 < \alpha < 2$, $c > 0$, d — действительное число, у многозначных ф-ций $\ln s$, s^α выбираются те ветви, для к-рых $\ln s$ действительный, а $s^\alpha > 0$ при $s > 0$.